Algorithmen und
Berechnungskomplexität II
Sommersemester 2020

Abgabe: 29.06.2020, 12.00 Uhr
Besprechung: KW 27

Prof. Dr. Heiko Röglin
Anna Großwendt, David Kübel
Institut für Informatik

Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1: Entscheidungs- vs. Optimierungsvariante

Wir betrachten die Variante `EXACT VERTEX COVER` des Problems `VERTEX COVER`. Eingabe hierfür ist ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.

- Bei der Entscheidungsvariante von `EXACT VERTEX COVER` geht es um die Frage, ob ein Vertex Cover $X \subseteq V$ existiert, sodass jede Kante von G mit genau einem Knoten aus X inzident ist. Eine solche Menge nennen wir ein *exaktes Vertex Cover* von G.
- Bei der *Optimierungsvariante* von `EXACT VERTEX COVER` soll ein minimales exaktes Vertex Cover von G bestimmt werden.

Kann die Entscheidungvariante von `EXACT VERTEX COVER` in deterministisch polynomieller Zeit gelöst werden oder ist sie NP-schwer? Kann die Optimierungsvariante in deterministisch polynomieller Zeit gelöst werden?

Aufgabe 10.2: Polynomielle Reduktion

Betrachten Sie die Probleme PARTITION und die Entscheidungsvariante KNAPSACK des Rucksackproblems:

PARTITION
Gegeben: Menge $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ aus n natürlichen Zahlen.
Frage: Gibt es eine Teilmenge $T \subset \{1, \ldots, n\}$, sodass $\sum_{i \in T} a_i = \sum_{j \in M \setminus T} a_j$ gilt?

KNAPSACK
Gegeben: Menge $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ aus n Gegenständen $a_i = (g_i, w_i) \in \mathbb{N}^2$ mit Gewicht g_i und Wert w_i. Dazu eine Gesamtgewichtskapazität $G \in \mathbb{N}$ und eine Wertuntergrenze $W \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Teilmenge $T \subseteq \{1, \ldots, n\}$, sodass $\sum_{i \in T} g_i \leq G$ und $\sum_{i \in T} w_i \geq W$ gilt?

Zeigen Sie, dass PARTITION polynomiell auf KNAPSACK reduziert werden kann. Geben Sie dazu eine Reduktionsfunktion an und zeigen Sie, dass sie die notwendigen Eigenschaften erfüllt.

Aufgabe 10.3: Polynomielle Reduktion

Ein *Hamiltonkreis* in einem Graphen $G = (V, E)$ ist ein Kreis, der jeden Knoten $v \in V$ genau einmal besucht. Bei dem Problem `HC` (Hamiltonian Circuit) besteht die Eingabe aus einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$, für den entschieden werden soll, ob er einen Hamiltonkreis enthält oder nicht. Zeigen Sie, dass das Problem `HC` NP-vollständig ist.

Hinweis: Geben Sie eine polynomielle Reduktion eines bekannten NP-vollständigen Problems auf `HC` an. Es eignet sich beispielsweise `3-SAT`.

Aufgabe 10.4: `Max-3-SAT`

Die Entscheidungsvariante des Problems `Max-3-SAT` ist wie folgt definiert.

`Max-3-SAT`: Gegeben: Ein Aussagenlogischer Ausdruck $\alpha = k_1 \wedge k_2 \wedge \cdots \wedge k_\ell$ mit Klauseln vom Grad ≤ 3 in Konjunktiver Normalform mit insgesamt m verwendeten Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_m$, und eine Zahl t.
Frage: Gibt es eine Belegung der Variablen, so dass mindestens t Klauseln aus $k_1, k_2, \ldots, k_\ell$ erfüllt sind?

1. Beweisen Sie, dass Max-3-SAT NP-Vollständig ist. Verwenden Sie hierbei eine Reduktion von 3-SAT.

2. Geben Sie ein Konstruktionssschema an, welches eine Belegung der Variablen konstruiert, so dass mindestens $\lceil \frac{\ell}{2} \rceil$ Klauseln erfüllt werden.
Hinweis: Starten Sie mit irgendeiner Belegung der Variablen. Wieviele Klauseln werden von dieser erfüllt?

3. Betrachten Sie den Fall, dass in jeder Klausel 3 Literale zu jeweils 3 verschiedenen Variablen enthalten sind. Für eine beliebige Belegung B der Variablen bezeichne $\phi(\alpha, B)$ die Anzahl Klauseln in α welche durch B erfüllt sind. Bestimmen Sie zunächst den Wert

$$\Phi(\alpha) = \sum_{\text{Belegung } B \text{ der Variablen } x_1, \ldots x_m} \phi(\alpha, B) \ .$$

Beweisen Sie nun, dass es eine Belegung gibt, die mindestens $\Phi(\alpha)/2^m$ viele Klauseln von α erfüllt. Dies entspricht wieviel Prozent der Klauseln?