Algorithmen und
Berechnungskomplexität II
Sommersemester 2020

Abgabe: 08.06.2020, 12.00 Uhr
Besprechung: KW 24

Prof. Dr. Heiko Röglin
Anna Großwendt, David Kübel
Institut für Informatik

Übungsblatt 7

Aufgabe 7.1:

Analog zum in der Vorlesung eingeführten Reduktionskonzept betrachten wir nun das Konzept der polynomiellen Reduktion: Eine Sprache L_1 heißt *polynomiell reduzierbar auf* eine Sprache L_2, kurz $L_1 \leq_p L_2$, wenn eine **in Polynomialzeit** berechenbare Funktion $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ existiert, sodass für alle Wörter $x \in \Sigma^*$ gilt:

$$x \in L_1 \Longleftrightarrow f(x) \in L_2\,.$$

Wir betrachten zwei Sprachen L_1 und L_2. Beantworten Sie folgende Fragen und begründen Sie Ihre Antwort. Beachten Sie, dass „ja“, „nein“ und „keine Aussage möglich“ als Antworten in Frage kommen.

Für (a) bis (c) nehmen wir an, dass $L_1 \leq L_2$ gilt.

(a) Wenn L_2 in P liegt, liegt dann L_1 in P?

(b) Wenn L_1 nicht entscheidbar ist, liegt dann L_2 in P?

(c) Wenn L_1 in P liegt, ist dann L_2 entscheidbar?

Für (d) bis (f) nehmen wir an, dass $L_1 \leq_p L_2$ gilt.

(d) Wenn L_2 in P liegt, liegt dann L_1 in P?

(e) Wenn L_1 nicht in P liegt, ist dann L_2 entscheidbar?

(f) Wenn L_1 nicht entscheidbar ist, ist dann L_2 entscheidbar?

Aufgabe 7.2:

Wir betrachten das Problem `PARTITION`. Eingabe hierfür sind natürliche Zahlen $b_1, \ldots, b_n$.

- Bei der *Entscheidungsvariante* von `PARTITION` soll entschieden werden, ob es eine Teilmenge I_1 der Indexmenge $I = \{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass gilt: $\sum_{i \in I_1} b_i = \sum_{i \in I_2} b_i$, wobei $I_2 = I \setminus I_1$.
- Bei der *Optimierungsvariante* von `PARTITION` soll eine solche Partition (I_1, I_2) von I ausgegeben werden, falls sie existiert. Ansonsten soll „Nein“ ausgegeben werden.

Zeigen Sie, dass die Optimierungsvariante von `PARTITION` in polynomieller Zeit gelöst werden kann, wenn die Entscheidungsvariante von `PARTITION` in $\mathcal{P}$ liegt.

Aufgabe 7.3:

Es seien ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ und zwei Knoten $s, t \in V$ gegeben. Entwerfen Sie eine Turingmaschine die in Polynomialzeit für eine binär kodierte Eingabe $\langle V, E, s, t \rangle$ entscheidet, ob ein gerichteter Pfad von s nach t in G existiert.

Aufgabe 7.4:

Zeigen Sie, dass sich die Entscheidungsvarianten von `VERTEXCOVER` und von `CLIQUE` jeweils polynomiell aufeinander reduzieren lassen.