Randomisierte und Approximative Algorithmen
Wintersemester 2020/21

Besprechung: KW 46

Thomas Kesselheim
Heiko Röglin
Andreas Abels
Ken Berkpinar
Institut für Informatik

Präsenzaufgaben 1

Aufgabe 1.1

(a) Zeigen Sie, dass in Bäumen mit $|V| \geq 3$ immer ein optimales Vertex Cover existiert, das keine Blätter enthält.

(b) Sei $G = (V, E)$ ein Baum. Geben Sie einen Algorithmus an, der ein optimales Vertex Cover für G in Laufzeit $O(|V|)$ berechnet, und beweisen Sie dessen Korrektheit.

Aufgabe 1.2

Beim Bin-Packing-Problem ist eine Folge $s_1, \ldots, s_n \in (0, 1]$ von Objektgrößen gegeben. Gesucht ist die kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$, für die eine Zuordnung $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ existiert, sodass

$$\sum_{f(i)=j} s_i \leq 1$$

für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$ gilt.
Geben Sie einen Greedy-Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ und Approximationsfaktor 2 für das Bin-Packing-Problem an. Geben Sie einen Beweis für den erreichten Approximationsfaktor an.

Aufgabe 1.3

In der Vorlesung Algo II haben Sie das Konzept der Polynomialzeit-Reduktion kennengelernt. Hierbei wurde gezeigt, dass ein Polynomialzeit-Algorithmus für ein Entscheidungsproblem einen Polynomialzeitalgorithmus für ein anderes Entscheidungsproblem implizieren kann. Diese Reduktionen können prinzipiell auch auf Optimierungsprobleme angewandt werden, allerdings bleibt der Approximationsfaktor im Allgemeinen nicht erhalten.

(a) Sei C ein Vertex Cover im Graphen $G = (V, E)$, dann ist $V \setminus C$ ein Independent Set in G. Zeigen Sie, dass diese Reduktion den Approximationsfaktor nicht erhält.

(b) Sei I ein Independent Set im Graphen $G = (V, E)$, dann ist $C = I$ eine Clique im Graphen $G = (V, \overline{E})$, wobei $\overline{E}$ das Komplement von E ist. Erhält diese Reduktion den Approximationsfaktor? Beweisen oder widerlegen Sie die Aussage.