Algorithmen und
Berechnungskomplexität II
Sommersemester 2017

Abgabe: 31.05.2017, 12:30 Uhr
Besprechung: KW 23

Prof. Dr. Heiko Röglin
Clemens Rösner
Institut für Informatik

Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1: (6 Punkte)

Zeigen Sie mithilfe einer Turing-Reduktion, dass die Sprache $A_{\mathbb{P}} = \{\langle M \rangle : M \text{ entscheidet } \mathbb{P}\}$ nicht rekursiv ist, wobei $\mathbb{P} = \{x \in \{0,1\}^* : \text{val}(x) \text{ ist eine Primzahl}\}$ die Menge aller Primzahlen (in Binärkodierung) ist.

Aufgabe 6.2: (3 + 3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht entscheidbar sind:

(a) $L_{\text{even}} = \left\{ \langle M \rangle : \begin{array}{l} M \text{ akzeptiert alle Eingaben gerader Länge und} \\ \text{verhält sich auf allen anderen Eingaben beliebig} \end{array} \right\}$,

(b) $H_\varepsilon^{\text{even}} = \{\langle M \rangle : M \text{ hält auf der leeren Eingabe nach gerade vielen Schritten}\}$.

Aufgabe 6.3: (3 + 3 Punkte)

Weisen Sie für die folgenden Sprachen entweder mit dem Satz von Rice nach, dass sie nicht entscheidbar sind, oder argumentieren Sie, warum der Satz von Rice nicht angewendet werden kann. Welche Auswirkung hat es auf die Entscheidbarkeit einer Sprache $L(S)$, für $S \subseteq \mathcal{R}$, wenn der Satz von Rice nicht angewendet werden kann?

(a)

$$L_{\to \frac{1}{\sqrt{2}}} = \left\{ \langle M \rangle : \lim_{n \to \infty} \frac{|\{w \in \{0,1\}^n : M \text{ akzeptiert } w\}|}{|\{0,1\}^n|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

(b)

$$L_{\frac{1}{3}} = \left\{ \langle M \rangle : \exists n \in \mathbb{N} \text{ sodass } \frac{|\{w \in \{0,1\}^n : M \text{ akzeptiert } w\}|}{|\{0,1\}^n|} = \frac{1}{3} \right\}$$

Aufgabe 6.4: (6 Punkte)

Die Sprache

$$N = \left\{ \text{code}(p) : p \text{ ist multivariates Polynom mit einer ganzzahligen Nullstelle } (z_1, \ldots, z_l) \in \mathbb{Z}^l \right\}$$

des 10. Hilbertschen Problems ist unentscheidbar. Wir betrachten nun die Sprache

$$N_{\mathbb{N}} = \left\{ \text{code}(p) : p \text{ ist multivariates Polynom mit einer } \textbf{natürlichen} \text{ Nullstelle } (n_1, \ldots, n_l) \in \mathbb{N}^l \right\} .$$

Zeigen Sie, dass sich N auf $N_{\mathbb{N}}$ reduzieren lässt.